

AĞIRLIK MERKEZİ VE ALAN ATALET MOMENTİ

1. AĞIRLIK MERKEZİ (CENTROID)

Ağırlık merkezi paralel kuvvetlerden ortaya çıkan geometrik bir kavramdır. Yalnızca paralel kuvvetleri ağırlık merkezi vardır. Ağırlık merkezi bir fiziksel cismin veya parçacıklar sisteminin tüm ağırlığının toplandığı nokta olarak düşünülür. Düzgün geometrik cisimlerde eğer simetri eksenini varsa ağırlık merkezi bu simetri eksenini üzerindedir. Eğer iki veya üç simetri eksenini varsa ağırlık merkezi bu eksenlerin kesişim noktasında yer alır. Birkaç cismin birleşmesiyle oluşmuş cisimlere kompozit cisim adı verilir.

Ağırlık merkezlerinin hesaplanması:

Çizgi (Line-a thin rod)		Alan (Area-a flat plate with constant thickness)		Hacim (Volume-a sphere or a cone)	
	<i>Kompozit</i>		<i>Kompozit</i>		<i>Kompozit</i>
$\bar{x} = \frac{\int x dl}{\int dl}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}$	$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$	$\bar{x} = \frac{\int x dV}{\int dV}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}$
$\bar{y} = \frac{\int y dl}{\int dl}$	$\bar{y} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}$	$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$	$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$	$\bar{y} = \frac{\int y dV}{\int dV}$	$\bar{y} = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}$
$\bar{z} = \frac{\int z dl}{\int dl}$	$\bar{z} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$	$\bar{z} = \frac{\int z dA}{\int dA}$	$\bar{z} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$	$\bar{z} = \frac{\int z dV}{\int dV}$	$\bar{z} = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$

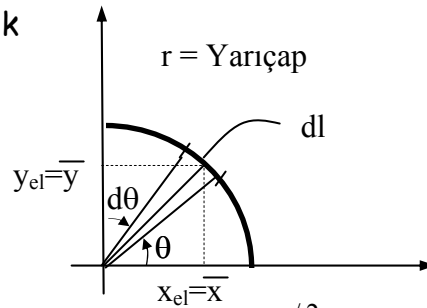
BAZI GEOMETRİK ŞEKİLLERİN AĞIRLIK MERKEZLERİ

1. Çeyrek Çember Şeklinde İnce Çubuk

$$dl = r \cdot d\theta$$

$$\bar{x}_{el} = x = r \cos \theta$$

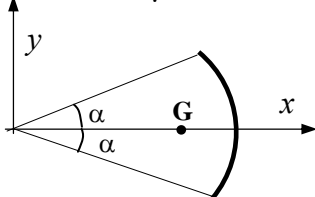
$$\bar{y}_{el} = y = r \sin \theta$$



$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} r \cos \theta r d\theta}{\int_0^{\pi/2} r d\theta} = \frac{r^2 [\sin \theta]_0^{\pi/2}}{r [\theta]_0^{\pi/2}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2r}{\pi}$$

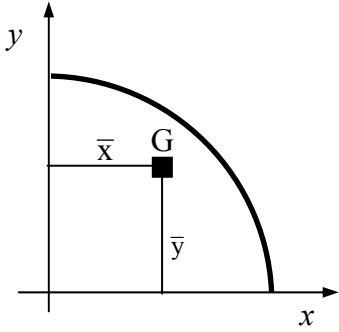
$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi/2} r \sin \theta r d\theta}{\int_0^{\pi/2} r d\theta} = \frac{r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/2}}{r [\theta]_0^{\pi/2}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

2. Çember Yayı



$$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad \bar{y} = 0$$

3. Çeyrek Dairenin Ağırlık Merkezi



$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{dA} \quad A = \frac{\pi r^2}{4} \quad dA = \rho d\theta d\rho$$

$$\int y dA = \int \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta = \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^r \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

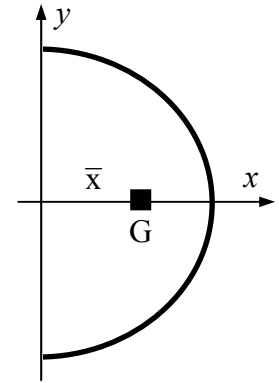
$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

4. Yarım Dairenin Ağırlık Merkezi

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{dA} \quad \bar{y} = 0 \quad A = \frac{\pi r^2}{2} \quad dA = \rho d\theta d\rho$$

$$\int x dA = \int \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta = \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$$



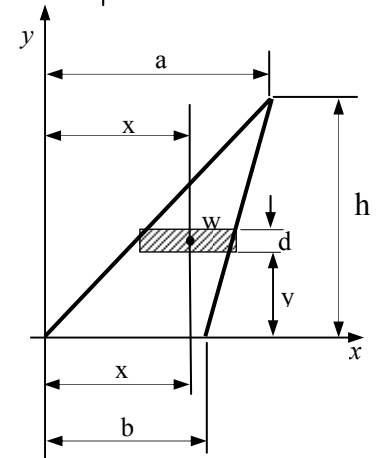
5. Üçgen

$$\bar{x} = ? \quad \bar{y} = \frac{h}{3} \quad dA = w dy$$

$$\int x dA = \int_0^h \left[\left(\frac{a}{h} y + \frac{b}{2h} (h-y) \right) \left(\frac{b}{h} (h-y) \right) \right] dy$$

$$x = x' + \frac{w}{2} \quad \int dA = \int w dy = \int_0^h \left[b - \frac{b}{h} y \right] dy = \frac{bh}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$$



6. Parabol

$$y = \frac{x^2}{2b}$$

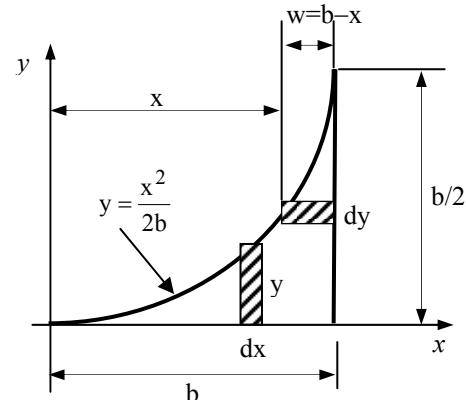
$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \quad \int dA = \int y dx = \int_0^b \frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^2}{6}$$

$$\int x dA = \int xy dx = \int_0^b x \frac{x^2}{2b} dx = \frac{b^3}{8}$$

$$\int y dA = \int wy dy = \int_0^{b/2} \left(b - (y^{1/2} 2^{1/2} b^{1/2}) \right) dy = \frac{b^3}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{3b}{20}$$



ALAN ATALET (EYLEMSİZLİK) MOMENTLERİ

Etkidikleri alan içerisinde düzgün olarak dağılmış kuvvetlerin genelde bu alan içinde veya ona dik bir düzlemde yer alan bir eksene göre momentlerinin hesaplanması gerekir. Çoğunlukla bu kuvvetlerin şiddetleri (basınç ve gerilme) kuvvetin etkiye doğrultusunun moment ekseninden olan uzaklığıyla doğru orantılıdır. Bu şekilde, elemanter bir alana etkiyen elemanter bir kuvvet ile orantılı olur. Elemanter moment ise (mesafe²×diferansiyel alan) ile orantılı olur. Bu nedenle toplam moment $\int(\text{mesafe})^2 d(\text{alan})$ şeklinde bir integral içerir. Bu integrale alan atalet momenti veya alan ikinci momenti denir.

Atalet momenti hız, ivme, kuvvet gibi fiziksel bir büyüklük olmayıp hesap kolaylığı sağlamaya yöneliktir. Bir kirişin eğilmesinde, bir milin burulmasında, bir makina veya yapı elemanının herhangi bir kesitindeki gerilmelerin hesabında $\int x^2 dA$, $\int y^2 dA$, $\int r^2 dA$, $\int xy dA$ gibi integraller karşımıza çıkar.

$$I_x = \int y^2 dA \quad \text{A alanının x eksenine göre atalet momenti}$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad \text{A alanının y eksenine göre atalet momenti}$$

$$I_o = \int r^2 dA \quad \text{A alanının O noktasına göre atalet momenti}$$

$$I_{xy} = \int xy dA \quad \text{A alanının xy eksenlerine göre çarpım atalet momenti}$$

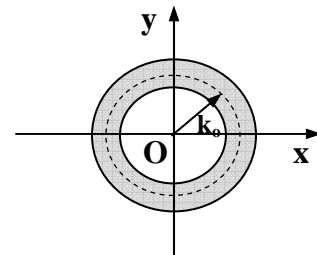
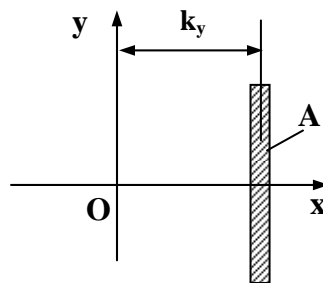
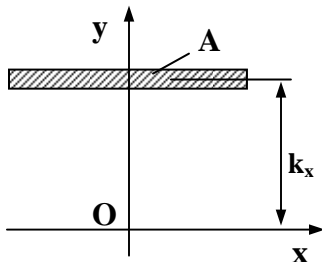
O noktasına göre atalet momentine kutupsal (polar) atalet momenti de denir. Bu moment alana dik durumda O' dan geçen eksene göre tanımlanmış olarak da düşünülür. Diğer bir deyişle $I_o = I_z$ dir. $r^2 = x^2 + y^2$ olduğundan $I_o = I_z = I_x + I_y$ bağıntısı geçerlidir.

1. Bir alanın I_o , I_x , I_y atalet momentleri daima (+) değer alır.
2. I_{xy} ise (-), 0 veya (+) olabilir.
3. Tüm atalet momentlerinin birimi uzunluk için alınan birimin 4. kuvvetidir (L^4).
4. Bir alanın, bir eksene göre sahip olabileceği en küçük atalet momenti bu alanın ağırlık merkezinden geçen eksenlerden birine göre gerçekleşir. Bir alanın bir eksene göre atalet momenti, bu eksen ağırlık merkezinden uzaklaştıkça büyür.

Bir alanın eylemsizlik yarıçapı

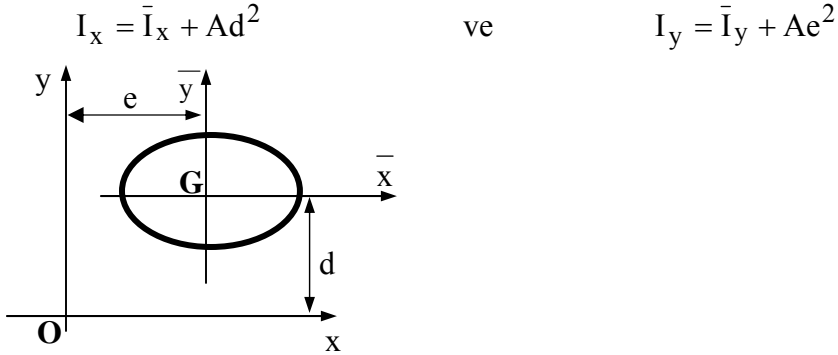
x eksenine göre atalet momenti I_x olan A alanının x eksenine göre paralel ince bir şeritte toplandığını varsayalım. Bu şerit alanın x eksenine göre momenti yine I_x ise şerit x ekseninden $I_x = k_x^2 A$ bağıntısı ile belirlenecek bir k_x uzaklığına konmalıdır.

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} \quad k_o^2 = k_x^2 + k_y^2$$



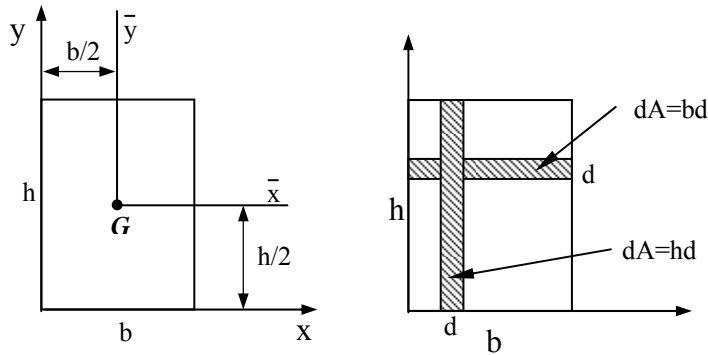
PARALEL EKSENLER (STEINER) TEOREMİ

Bir A alanının ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti biliniyorsa, bu eksene paralel olan fakat ağırlık merkezinden geçmeyen herhangi bir eksene göre atalet momenti şu şekilde hesaplanır:



BAZI GEOMETRİK ŞEKİLLERİN ALAN ATALET MOMENTLERİ

1) DİKDÖRTGEN



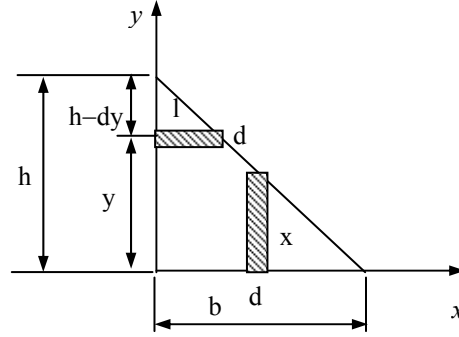
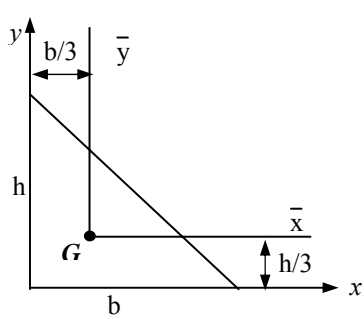
$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 h dx = h \int_0^b x^2 dx = \frac{hx^3}{3} \Big|_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \quad d = \frac{h}{2} \quad \bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ae^2 \quad e = \frac{b}{2} \quad \bar{I}_y = I_y - Ae^2 = \frac{hb^3}{3} - bh \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{hb^3}{12}$$

2. ÜÇGEN



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = l \cdot dy$$

Benzer üçgenlerden,

$$\frac{l}{h-y} = \frac{b}{h} \quad l = \frac{b}{h}(h-y)$$

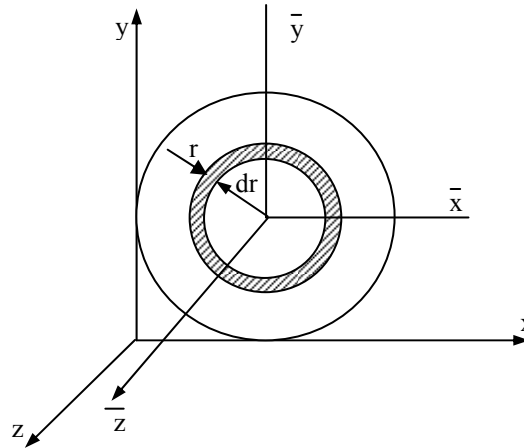
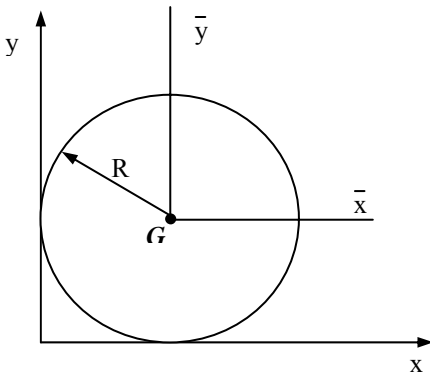
$$I_x = \int y^2 l dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h - \frac{y^4}{4} \frac{b}{h} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \frac{hb^3}{12}$$

$$\bar{I}_y = I_y - Ae^2 = \frac{hb^3}{36}$$

3. DAİRE



Simetriden dolayı;

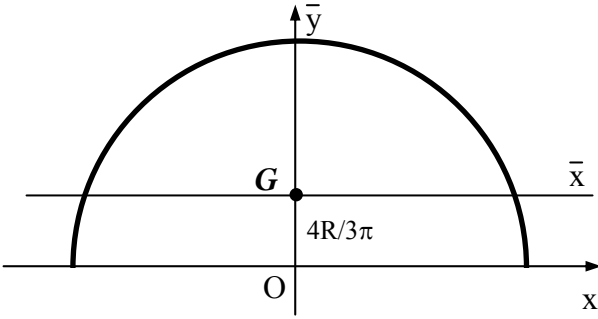
$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\bar{I}_o = \bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

$$\bar{I}_z = \int r^2 dA = \int r^2 2\pi r dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 (R)^2 = \frac{5}{4} \pi R^4$$

4. YARIM DAİRE

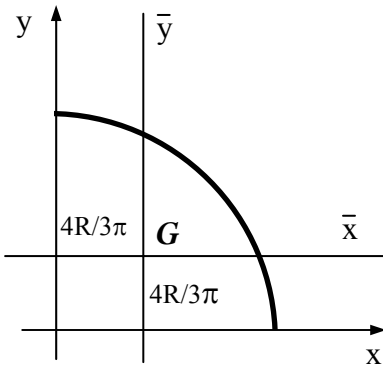


$$I_x = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = R^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$$

$$\bar{I}_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{2} = \frac{\pi R^4}{8}$$

5. ÇEYREK DAİRE



$$I_x = I_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$